Balti Tee

16. november 2024, Tartu, Eesti — Version: Estonian

Lahendamisaega on 4 tundi 30 minutit.
Küsimusi võib esitada esimese 30 minuti jooksul.
Ainult kirjutus- ja joonestusvahendid on lubatud.

Ülesanne 1. Olgu α nullist erinev reaalarv. Leia kõik funktsioonid $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mis rahuldavad võrrandit

$$xf(x+y) = (x+\alpha y)f(x) + xf(y)$$

kõigi $x, y \in \mathbb{R}$ korral.

Ülesanne 2. Olgu $\mathbb{R}^+$ kõigi positiivsete reaalarvude hulk. Leia kõik funktsioonid $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, mis rahuldavad võrrandit

$$\frac{f(a)}{1+a+ca} + \frac{f(b)}{1+b+ab} + \frac{f(c)}{1+c+bc} = 1$$

kõigi $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ korral, mis rahuldavad tingimust $abc = 1$.

Ülesanne 3. Tahvlile on kirjutatud positiivsed reaalarvud $a_1, a_2, \ldots, a_{2024}$. Käik seisneb kahe arvu x ja y valimises, nende kustutamises tahvlilt ning arvu $\dfrac{x^2+6xy+y^2}{x+y}$ kirjutamises tahvlile. Pärast 2023 käiku jääb tahvlile ainult üks arv c. Tõesta, et

$$c < 2024\,(a_1 + a_2 + \ldots + a_{2024})\,.$$

Ülesanne 4. Leia suurim reaalarv α, mille korral kõik mittenegatiivsed reaalarvud x, y ja z rahuldavad järgmist võrratust:

$$(x+y+z)^3 + \alpha\left(x^2z + y^2x + z^2y\right) \geqslant \alpha\left(x^2y + y^2z + z^2x\right).$$

Ülesanne 5. Leia kõik positiivsed reaalarvud λ, mille korral iga positiivsetest reaalarvudest koosnev jada $a_1, a_2, \ldots$, mis rahuldab tingimust

$$a_{n+1} = \lambda \cdot \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$$

iga $n \geqslant 2024^{2024}$ korral, on tõkestatud.

Märkus: Positiivsete reaalarvude jada $a_1, a_2, \ldots$ on *tõkestatud*, kui leidub reaalarv M, nii et $a_i < M$ iga $i = 1, 2, \ldots$ korral.

Ülesanne 6. *Labürint* on süsteem, mis koosneb 2024 koopast ja 2023 mittelõikuvast (kahesuunalisest) koridorist, millest igaüks ühendab täpselt kahte koobast, nii et iga koopapaar on omavahel ühendatud mingi koridoride järjestuse kaudu. Esialgu asub Erik koridoris, mis ühendab mingit kahte koobast. Ühe käigu jooksul saab ta kõndida läbi ühe koopa teise koridori, mis ühendab seda koobast mingi kolmanda koopaga. Seejärel kaob aga maagiliselt koridor, kus ta äsja viibis, ja selle asemele ilmub uus koridor, mis ühendab tema uue koridori lõppu ja vana koridori algust (st, kui Erik viibis koridoris, mis ühendas koopaid a ja b, ning kõndis läbi koopa b koridori, mis ühendab koopaid b ja c, siis kaob koridor koobaste a ja b vahel ning ilmub uus koridor koobaste a ja c vahel).

Kuna Erikule meeldib labürinte kujundada ja tal on järgmise jaoks kindel paigutus mõttes, siis soovib ta teada, kas ta saab labürindi paigutuse nende käikude abil soovituks muuta. Tõesta, et see on tõepoolest võimalik, sõltumata esialgsest paigutusest ja tema algsest positsioonist.

Ülesanne 7. Ruudustikul mõõtmetega 45×45 on eemaldatud keskmine ühikruut. Milliste positiivsete täisarvude n korral on võimalik ülejäänud ala jagada $1 \times n$ ja $n \times 1$ ristkülikuteks?

Ülesanne 8. Olgu a, b, n positiivsed täisarvud nii, et $a + b \leqslant n^2$. Andres ja Birgit mängivad mängu (algselt värvimata) $n \times n$ ruudustikul järgmiselt:

- Kõigepealt värvib Andres a ruutu roheliseks.
- Seejärel värvib Birgit b teist (st värvimata) ruutu siniseks.

Andres võidab, kui ta leiab siniste ruutudeta tee, mis algab vasakult alumisest ruudust ja lõppeb paremas ülemises ruudus (kus tee on järjestikuste ruutude jada, kus igal kahel järjestikusel ruudul on ühine külg), vastasel juhul võidab Birgit. Leia, sõltuvalt a, b ja n väärtustest, kummal mängijal leidub võitev strateegia.

Ülesanne 9. Olgu S lõplik hulk. Positiivse täisarvu n korral nimetame funktsiooni $f\colon S \to S$ *n-ndaks astmeks*, kui leidub selline funktsioon $g\colon S \to S$, et

$$f(x) = \underbrace{g(g(\ldots g(x)\ldots))}_{g \text{ rakendatud } n \text{ korda}}$$

iga $x \in S$ korral.

Eeldame, et funktsioon $f\colon S \to S$ on n-s aste iga positiivse täisarvu n korral. Kas sellest järeldub, et $f(f(x)) = f(x)$ iga $x \in S$ korral?

Ülesanne 10. Konn asub ühikruudul lõpmatus ruudustikus, mis on orienteeritud põhiilmakaarte järgi. Konn teeb käike, mis koosnevad kas ühe või kahe ruudu pikkusest hüppest suunas, kuhu ta vaatab, ning seejärel pööramisest vastavalt järgmistele reeglitele:

1) kui konn hüppas ühe ruudu võrra, pöörab ta seejärel 90° paremale;
2) kui konn hüppas kahe ruudu võrra, pöörab ta seejärel 90° vasakule.

Kas on võimalik, et konn jõuab täpselt 2024 ruudu kaugusele põhja suunas algsest ruudust pärast mingit lõplikku arvu käike, kui ta algselt vaatab:

a) põhja suunas;
b) ida suunas?

Ülesanne 11. Olgu $ABCD$ kõõlnelinurk, kus AC ja BD on risti, ja olgu O selle ümberringjoone keskpunkt. Punktid X ja Y asuvad kolmnurga BOD ümberringjoonel, nii et $\angle AXO = \angle CYO = 90^\circ$. Olgu M lõigu AC keskpunkt. Tõesta, et BD puutub kolmnurga MXY ümberringjoont.

Ülesanne 12. Olgu ABC teravnurkne kolmnurk, mis rahuldab tingimust $|AB| < |AC|$, ja olgu ω selle ümberringjoon. Olgu M punkti A sisaldava ω kaare BC keskpunkt ja olgu $X \neq M$ teine punkt ringjoonel ω, mille korral $|AX| = |AM|$. Punktid E ja F valitakse vastavalt kolmnurga ABC külgedel AC ja AB nii, et $|EX| = |EC|$ ja $|FX| = |FB|$. Tõesta, et $|AE| = |AF|$.

Ülesanne 13. Olgu ABC teravnurkne kolmnurk, mille kõrgused lõikuvad punktis H. Olgu D selline punkt kolmnurga ABC ümberringjoonest väljaspool, et $\angle ABD = \angle DCA$. Sirge AB peegeldus üle sirge BD lõikab sirget CD punktis X. Sirge AC peegeldus üle sirge CD lõikab sirget BD punktis Y. Sirgetega AC ja AB ristuvad sirged, mis läbivad vastavalt punkte X ja Y, lõikuvad punktis P. Tõesta, et punktid D, P ja H asuvad ühel sirgel.

Ülesanne 14. Olgu ABC teravnurkne kolmnurk ja olgu ω selle ümberringjoon. Kolmnurga ABC kõrgused AD, BE ja CF lõikuvad punktis H. Punkt K valitakse sirgel EF nii, et $KH \parallel BC$. Tõesta, et punkti H peegeldus üle sirge KD asub ringjoonel ω.

Ülesanne 15. Tasandil on antud $N \geqslant 3$ punktiga hulk, nii et ükski kolm punkti ei asu samal sirgel. Ütleme, et selle hulga kolm punkti A, B, C moodustavad *Balti kolmnurga*, kui ükski teine punkt antud hulgast ei asu kolmnurga ABC ümberringjoonel. On teada, et leidub vähemalt üks Balti kolmnurk.

Näita, et leidub vähemalt $\dfrac{N}{3}$ Balti kolmnurka.

Ülesanne 16. Leia kõik positiivsed kordarvud n, mille iga positiivse jagaja d jaoks leiduvad täisarvud $k \geqslant 0$ ja $m \geqslant 2$, nii et $d = k^m + 1$.

Ülesanne 17. Kas leidub lõpmatu palju positiivsete täisarvude nelikuid (a, b, c, d), mille korral arv $a^{a!} + b^{b!} - c^{c!} - d^{d!}$ on algarv ja $2 \leqslant d \leqslant c \leqslant b \leqslant a \leqslant d^{2024}$?

Ülesanne 18. Lõpmatu positiivsete täisarvude jada $a_1, a_2, \ldots$ on selline, et $a_n \geqslant 2$ ja a_{n+2} jagab arvu $a_{n+1} + a_n$ iga $n \geqslant 1$ korral. Tõesta, et leidub algarv, mis jagab lõpmatu palju selle jada liikmeid.

Ülesanne 19. Kas leidub positiivne täisarv N, mis jagub vähemalt 2024 erineva algarvuga ja mille positiivsed jagajad $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_k = N$ on sellised, et arv

$$\frac{d_2}{d_1} + \frac{d_3}{d_2} + \ldots + \frac{d_k}{d_{k-1}}$$

on täisarv?

Ülesanne 20. Positiivsed täisarvud a, b ja c rahuldavad võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} (ab-1)^2 = c\left(a^2+b^2\right) + ab + 1, \\ a^2 + b^2 = c^2 + ab. \end{cases}$$

a) Tõesta, et $c + 1$ on täisruut.

b) Leia kõik sellised kolmikud (a, b, c).