Baltic Way

16. November 2024, Tartu, Estland

Version: German

Arbeitszeit: 4 Stunden und 30 Minuten.
Während der ersten 30 Minuten können Anfragen an die Jury gestellt werden.
Schreib- und Zeichengeräte sind die einzigen erlaubten Hilfsmittel.

Aufgabe 1. Es sei α eine reelle Zahl ungleich Null. Ermittle alle Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, für die

$$xf(x+y) = (x+\alpha y)f(x) + xf(y)$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt.

Aufgabe 2. Mit $\mathbb{R}^+$ bezeichnen wir die Menge der positiven reellen Zahlen. Ermittle alle Funktionen $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, für die

$$\frac{f(a)}{1+a+ca} + \frac{f(b)}{1+b+ab} + \frac{f(c)}{1+c+bc} = 1$$

für alle $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ mit der Eigenschaft $abc = 1$ gilt.

Aufgabe 3. An einer Tafel sind die positiven reellen Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_{2024}$ angeschrieben. Ein Zug besteht darin, zwei Zahlen x and y an der Tafel auszuwählen, sie abzuwischen und dann die Zahl $\dfrac{x^2+6xy+y^2}{x+y}$ an die Tafel zu schreiben. Nach 2023 Zügen steht nur noch die Zahl c an der Tafel. Zeige:

$$c < 2024\,(a_1 + a_2 + \ldots + a_{2024})\,.$$

Aufgabe 4. Finde die größte reelle Zahl α, für die die folgende Ungleichung für alle nichtnegativen reellen Zahlen x, y, z gilt:

$$(x+y+z)^3 + \alpha\left(x^2z + y^2x + z^2y\right) \geq \alpha\left(x^2y + y^2z + z^2x\right).$$

Aufgabe 5. Finde alle positiven reellen Zahlen λ mit der Eigenschaft, dass jede Folge $a_1, a_2, \ldots$ von positiven reellen Zahlen mit

$$a_{n+1} = \lambda \cdot \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$$

für alle $n \geq 2024^{2024}$ eine beschränkte Folge ist.

Bemerkung: Eine Folge $a_1, a_2, \ldots$ von positiven reellen Zahlen ist eine *beschränkte Folge*, wenn eine reelle Zahl M existiert mit der Eigenschaft $a_i < M$ für alle all $i = 1, 2, \ldots$

Aufgabe 6. Ein *Labyrinth* ist ein System aus 2024 Höhlen und 2023 sich nicht schneidenden (in beide Richtungen begehbaren) Gängen, die jeweils genau zwei Höhlen miteinander verbinden, und sodass jedes Paar von Höhlen durch eine Folge von Gängen verbunden ist. Zu Beginn steht Erik in einem Gang, der zwei Höhlen verbindet. In einem Zug kann er nun durch eine dieser Höhlen in einen Gang laufen, der diese mit einer dritten Höhle verbindet. Dabei wird jedoch der Gang, aus dem er gerade kam, auf magische Weise verschwinden und durch einen neuen Gang ersetzt, der das Ende des aktuellen Gangs mit dem Beginn des vorherigen verbindet (wenn Erik also in einem Gang zwischen den Höhlen a und b war und durch die Höhle b in einen Gang zwischen den Höhlen b und c gelaufen ist, so verschwindet der Gang zwischen den Höhlen a und b und es entsteht ein neuer Gang zwischen den Höhlen a und c).

Da Erik gerne Labyrinthe entwirft und sich bereits eine spezielle Gestalt für sein nächstes überlegt hat, fragt er sich, ob er das Labyrinth durch Anwendung dieser Züge in eines mit jener Gestalt überführen kann. Zeige, dass dies tatsächlich unabhängig von der ursprünglichen Gestalt und seiner Position zu Beginn möglich ist.

Aufgabe 7. Aus einem 45×45-Gitter wurde das mittlere Einheitsquadrat entfernt. Für welche positiven ganzen Zahlen n ist es möglich, die verbliebene Fläche in $1 \times n$- und $n \times 1$-Rechtecke zu zerschneiden?

Aufgabe 8. Gegeben seien positive ganze Zahlen a, b und n mit $a + b \leq n^2$. Alice und Bob spielen das folgende Spiel auf einem (zunächst ungefärbten) $n \times n$-Gitter:

- Zunächst färbt Alice a Felder grün.
- Anschließend färbt Bob b weitere (also ungefärbte) Felder blau.

Alice gewinnt, falls sie einen Pfad von nicht-blauen Feldern von der unteren linken Ecke in die obere rechte Ecke finden kann (dabei ist ein Pfad eine Folge von Feldern, sodass zwei aufeinanderfolgende Felder eine gemeinsame Kante haben), sonst gewinnt Bob. Bestimme, in Abhängigkeit von a, b und n, wer eine Gewinnstrategie hat.

Aufgabe 9. Gegeben sei eine endliche Menge S. Für eine positive ganze Zahl n nennen wir eine Funktion $f\colon S \to S$ eine *n-te Potenz*, falls es eine Funktion $g\colon S \to S$ gibt, für die

$$f(x) = \underbrace{g(g(\dots g(x)\dots))}_{g \text{ wird } n\text{-mal angewandt}}$$

für alle $x \in S$ gilt.

Angenommen, eine Funktion $f\colon S \to S$ ist für jede positive ganze Zahl n eine n-te Potenz. Gilt dann notwendigerweise $f(f(x)) = f(x)$ für alle $x \in S$?

Aufgabe 10. Ein Frosch sitzt auf einem Feld eines unendlichen Quadratgitters, welches nach den Himmelsrichtungen orientiert ist. Der Frosch macht Züge, die daraus bestehen, ein oder zwei Felder in die Richtung zu springen, in die er gerade schaut, und sich dann nach den folgenden Regeln zu drehen:

1) Ist der Frosch ein Feld gesprungen, dreht er sich um $90°$ nach rechts;
2) Ist der Frosch zwei Felder gesprungen, dreht er sich um $90°$ nach links.

Ist es für den Frosch möglich, das Feld genau 2024 Felder nördlich von seinem Startfeld durch eine endliche Folge solcher Sprünge zu erreichen, wenn er zunächst

a) nach Norden;
b) nach Osten

schaut?

Aufgabe 11. Es sei $ABCD$ ein Sehnenviereck mit Umkreismittelpunkt O, für das AC senkrecht zu BD ist. Die Punkte X und Y liegen so auf dem Umkreis des Dreiecks BOD, dass $\angle AXO = \angle CYO = 90°$ ist. Sei M der Mittelpunkt von $\overline{AC}$. Beweise, dass BD eine Tangente an den Umkreis des Dreiecks MXY ist.

Aufgabe 12. Es sei ABC ein spitzwinkliges Dreieck mit Umkreis ω und $|AB| < |AC|$. Sei M der Mittelpunkt des Kreisbogens $\widehat{BC}$ von ω, der den Punkt A enthält, und es sei $X \neq M$ der andere Punkt auf ω mit $|AX| = |AM|$. Die Punkte E und F werden auf den Seiten $\overline{AC}$ bzw. $\overline{AB}$ des Dreiecks ABC so gewählt, dass $|EX| = |EC|$ und $|FX| = |FB|$ gelte. Beweise, dass $|AE| = |AF|$ gilt.

Aufgabe 13. Es sei ABC ein spitzwinkliges Dreieck mit Höhenschnittpunkt H. Sei D ein Punkt außerhalb des Umkreises des Dreiecks ABC mit $\angle ABD = \angle DCA$. Das Bild von AB bei Spiegelung an BD schneide CD in X. Das Bild von AC bei Spiegelung an CD schneide BD in Y. Die Senkrechten durch X und Y zu AC bzw. AB mögen sich in P schneiden. Beweise, dass die Punkte D, P und H kollinear sind.

Aufgabe 14. Es sei ABC ein spitzwinkliges Dreieck mit Umkreis ω. Die Höhen AD, BE und CF des Dreiecks ABC schneiden sich im Punkt H. Ein Punkt K werde so auf der Geraden EF gewählt, dass $KH \parallel BC$ gelte. Beweise, dass der Spiegelpunkt von H an KD auf ω liegt.

Aufgabe 15. Gegeben sei eine Menge von $N \geq 3$ Punkten in der Ebene, sodass keine drei von ihnen kollinear sind. Drei Punkte A, B und C der Menge formen ein *baltisches Dreieck*, falls kein anderer Punkt der Menge auf dem Umkreis des Dreiecks ABC liegt. Wir nehmen an, dass es mindestens ein baltisches Dreieck gibt.

Beweise, dass es mindestens $\dfrac{N}{3}$ baltische Dreiecke gibt.

Aufgabe 16. Ermittle alle zusammengesetzten positiven ganzen Zahlen n, sodass es für jeden positiven Teiler d von n ganze Zahlen $k \geq 0$ und $m \geq 2$ gibt mit $d = k^m + 1$.

Aufgabe 17. Gibt es unendlich viele Quadrupel (a, b, c, d) positiver ganzer Zahlen, für die die Zahl $a^{a!} + b^{b!} - c^{c!} - d^{d!}$ prim ist und $2 \leq d \leq c \leq b \leq a \leq d^{2024}$ gilt?

Aufgabe 18. Gegeben sei eine unendliche Folge $a_1, a_2, \ldots$ positiver ganzer Zahlen, sodass für alle $n \geq 1$ sowohl $a_n \geq 2$ gilt als auch a_{n+2} ein Teiler von $a_{n+1} + a_n$ ist. Zeige, dass es eine Primzahl gibt, die unendlich viele der Folgenglieder teilt.

Aufgabe 19. Gibt es eine positive ganze Zahl N mit mindestens 2024 paarweise verschiedenen Primfaktoren derart, dass für ihre positiven Teiler $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_k = N$ die Zahl

$$\frac{d_2}{d_1} + \frac{d_3}{d_2} + \ldots + \frac{d_k}{d_{k-1}}$$

ganz ist?

Aufgabe 20. Positive ganze Zahlen a, b und c erfüllen das Gleichungssystem

$$\begin{cases} (ab-1)^2 & = c\left(a^2+b^2\right) + ab + 1, \\ a^2 + b^2 & = c^2 + ab. \end{cases}$$

a) Zeige, dass $c + 1$ eine Quadratzahl ist.

b) Ermittle alle solchen Tripel (a, b, c).