Baltic Way

16. nóvember 2024, Tartu, Eistlandi — Version: Icelandic

Tímamörk: 4 1/2 klukkustund.
Spurningar eru leyfðar fyrstu 30 mínúturnar.
Einungis skriffæri og teikniáhöld eru leyfð.

Dæmi 1. Látum $\alpha \neq 0$ vera rauntölu. Finnið öll föll $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ þannig að

$$xf(x+y) = (x+\alpha y)f(x) + xf(y)$$

fyrir öll $x, y \in \mathbb{R}$.

Dæmi 2. Látum $\mathbb{R}_+$ vera mengi jákvæðu rauntalnanna. Finnið öll föll $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ þannig að

$$\frac{f(a)}{1+a+ca} + \frac{f(b)}{1+b+ab} + \frac{f(c)}{1+c+bc} = 1$$

fyrir öll $a, b, c \in \mathbb{R}_+$ þar sem $abc = 1$.

Dæmi 3. Jákvæðar rauntölur $a_1, a_2, \ldots, a_{2024}$ eru skrifaðar á töfluna. Í hverri umferð eru tvær tölur x og y valdar á töflunni, þær strokaðar út og í stað þeirra er talan $\dfrac{x^2+6xy+y^2}{x+y}$ skrifuð á töfluna. Eftir 2023 umferðir er aðeins ein tala c eftir á töflunni. Sannið að

$$c < 2024\left(a_1 + a_2 + \ldots + a_{2024}\right).$$

Dæmi 4. Finnið stærstu rauntöluna α þannig að ójafnan

$$(x+y+z)^3 + \alpha\left(x^2z + y^2x + z^2y\right) \geq \alpha\left(x^2y + y^2z + z^2x\right).$$

gildi fyrir allar rauntölur $x, y, z \geq 0$.

Dæmi 5. Finnið allar jákvæðar rauntölur λ þannig að allar runur $a_1, a_2, \ldots$ af jákvæðum rauntölum, sem fullnægja

$$a_{n+1} = \lambda \cdot \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$$

fyrir öll $n \geq 2024^{2024}$, séu takmarkaðar.

Athugasemd: Runa $a_1, a_2, \ldots$ af jákvæðum rauntölum er *takmörkuð* ef til er rauntala M þannig að $a_i < M$ fyrir öll $i = 1, 2, \ldots$

Dæmi 6. *Völundarhús* er kerfi af 2024 hellum og 2023 (tvístefndum) göngum sem skerast ekki. Auk þess þarf hver gangur að tengja saman nákvæmlega tvö hella og milli sérhverja tveggja hella þarf að vera til runa af göngum sem tengja þá. Í upphafi stendur Eiríkur á gangi sem tengir saman einhverja tvo hella. Í hverri aðgerð getur hann gengið í gegnum helli yfir á annan gang sem tengir hann við þriðja helli. Við það þá lokast gangurinn sem hann var á, fyrir tilstilli galdra, og í stað hans opnast gangur á milli fyrsta og þriðja hellisins (þ.e. ef Eiríkur var á ganginum á milli hella a og b, og fer á ganginn milli hella b og c, þá lokast gangurinn á milli a og b, og í stað hans opnast gangur á milli a og c.)

Þar sem Eiríki finnst gaman að hanna völundarhús, þá veltir hann því fyrir sér hvort hann geti breytt núverandi völdunarhúsi í þá hönnun sem hann hefur í huga, með þessum aðgerðum. Sannið að þetta geti hann alltaf gert óháð því hvernig völundarhúsið var upphaflega og hvar hann var staddur.

Dæmi 7. Á 45×45 rúðuneti hefur einingaferningurinn í miðjunni verið fjarlægður. Fyrir hvaða jákvæðu heiltölur n er unnt að skera svæðið, sem eftir er, niður í $1 \times n$ og $n \times 1$ rétthyrninga?

Dæmi 8. Látum a, b, n vera jákvæðar heiltölur þannig að $a+b \leq n^2$. Anna og Baldur spila leik á $n \times n$ borði, sem er upphaflega ólitað. Leikurinn fer svona fram:

- Fyrst litar Anna a reiti græna.
- Næst litar Baldur b hinna (þ.e. ólituðu) reitina bláa.

Anna vinnur ef hún finnur veg í gegnum reitina sem eru ekki bláir frá neðra vinstra horninu til efra hægra hornsins, annars vinnur Baldur. Vegur er runa af reitum þannig að sérhverjir aðlægir reitir í rununni deili hlið. Ákvarðið hvor hefur örugga vinningsleið fyrir sérhver a, b og n.

Dæmi 9. Látum S vera endanlegt mengi. Fyrir jákvæða heiltölu n, segjum við að fall $f\colon S \to S$ sé *n-ta veldi* ef það er til fall $g\colon S \to S$ þannig að

$$f(x) = \underbrace{g(g(\ldots g(x)\ldots))}_{g \text{ beitt } n \text{ sinnum}}$$

fyrir öll $x \in S$.

Gerum ráð fyrir að fall $f\colon S \to S$ er n-ta veldi fyrir sérhverja jákvæða heiltölu n. Er víst að $f(f(x)) = f(x)$ fyrir öll $x \in S$?

Dæmi 10. Froskur er staddur á einingareiti í óendanlegu rúðuneti sem er snúið eftir höfuðáttunum. Í hverjum leik hoppar froskurinn annaðhvort einn eða tvo reiti áfram í þá átt sem hann snýr, og snýr sér svo samkvæmt þessum reglum:

i) Ef froskurinn hoppar einn reit fram, þá snýr hann sér $90°$ til hægri;

ii) Ef froskurinn hoppar tvo reiti fram, þá snýr hann sér $90°$ til vinstri;

Kemst froskurinn á reitinn sem er nákvæmlega 2024 reiti fyrir norðan upphafsreit hans eftir endanlega fjölda leikja ef hann snýr upphaflega í:

a) Norður;

b) Austur?

Dæmi 11. Látum $ABCD$ vera rásaðan ferhyrning með ummiðju O þannig að AC sé hornrétt á BD. Punktar X og Y liggja á umhring þríhyrningsins BOD þannig að $\angle AXO$ og $\angle CYO$ séu rétt. Látum M vera miðpunkt AC. Sannið að BD sé snertill við umhring þríhyrningsins MXY.

Dæmi 12. Látum ABC vera hvasshyrndan þríhyrning með umhring ω auk þess sem $AB < AC$. Látum M vera miðpunkt þess boga BC á ω sem A liggur á. Látum $X \neq M$ vera hinn punktinn á ω þannig að $AX = AM$. Punktarnir E og F eru valdir á hliðunum AC og AB í þríhyrningnum ABC, í sömu röð, þannig að $EX = EC$ og $FX = FB$. Sannið að $AE = AF$.

Dæmi 13. Látum ABC vera hvasshyrndan þríhyrning með hæðamiðju H. Látum D vera punkt utan umhrings þríhyrningsins ABC þannig að $\angle ABD = \angle DCA$. Speglun AB um BD sker CD í X. Speglun AC um CD sker BD í Y. Línurnar um X og Y sem eru hornréttar á AC og AB, í sömu röð, skerast í P. Sannið að punktarnir D, P og H liggja á sömu línu.

Dæmi 14. Látum ABC vera hvasshyrndan þríhyrning með umhring ω. Hæðirnar AD, BE og CF í þríhyrninginum ABC skerast í punkti H. Punktur K er valin á línunni EF þannig að $KH \parallel BC$. Sannið að speglun H um KD liggi á ω.

Dæmi 15. Gefið er mengi af $N \geq 3$ punktum í sléttunni þannig að engir þrír þeirra liggja á sömu línu. Þrír punktar A, B og C í menginu mynda *baltneskan þríhyrning* ef enginn hinna punktanna í menginu liggja á umhring þríhyrnings ABC. Gerum ráð fyrir að það sé til að minnsta kosti einn baltneskur þríhyrningur.

Sannið að það sé til að minnsta kosti $N/3$ baltneskir þríhyrningar.

Dæmi 16. Ákvarðið allar samsettar jákvæðar heiltölur n, þannig að fyrir sérhvern jákvæðan deili d í n, þá séu til heiltölur $k \geq 0$ og $m \geq 2$ þannig að $d = k^m + 1$.

Dæmi 17. Eru til óendanlega margar ferndir (a, b, c, d) af jákvæðum heiltölum þannig að talan $a^{a!} + b^{b!} - c^{c!} - d^{d!}$ sé frumtala og $2 \leq d \leq c \leq b \leq a \leq d^{2024}$?

Dæmi 18. Óendanleg runa $a_1, a_2, \ldots$ af jákvæðum heiltölum er þannig að $a_n \geq 2$ og a_{n+2} gengur upp í $a_{n+1} + a_n$ fyrir öll $n \geq 1$. Sannið að það sé til frumtala sem gengur upp í óendanlega marga liði rununnar.

Dæmi 19. Er til jákvæð heiltala N sem hefur að minnsta kosti 2024 ólíka frumþætti og hefur deila $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_k = N$ þannig að

$$\frac{d_2}{d_1} + \frac{d_3}{d_2} + \ldots + \frac{d_k}{d_{k-1}}$$

sé heiltala.

Dæmi 20. Jákvæðar heiltölur a, b og c fullnægja jöfnuhneppinu

$$\begin{cases} (ab-1)^2 &= c\left(a^2+b^2\right) + ab + 1, \\ a^2 + b^2 &= c^2 + ab. \end{cases}$$

a) Sannið að $c + 1$ sé ferningstala.

b) Finnið allar svona þrenndir (a, b, c).