



Laikas: 4 val. 30 min.

Laikas klausimams: pirmosios 30 minučių.

Leidžiamos tik rašymo ir braižybos priemonės.

1 uždutis. Duotas nenulinis realusis skaičius α . Raskite visas funkcijas $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, kurioms galioja

$$xf(x+y) = (x+\alpha y)f(x) + xf(y)$$

su visais $x, y \in \mathbb{R}$.

2 uždutis. Tegul \mathbb{R}^+ yra teigiamų realiųjų skaičių aibė. Raskite visas funkcijas $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, kurioms galioja

$$\frac{f(a)}{1+a+ca} + \frac{f(b)}{1+b+ab} + \frac{f(c)}{1+c+bc} = 1$$

su visais $a, b, c \in \mathbb{R}^+$, tenkinančiais $abc = 1$.

3 uždutis. Ant lentos yra užrašyti teigiami realieji skaičiai $a_1, a_2, \dots, a_{2024}$. Vienu ėjimu yra pasirinkami du ant lentos esantys skaičiai x ir y , jie ištrinami, ir vietoj jų ant lentos užrašomas skaičius $\frac{x^2 + 6xy + y^2}{x+y}$. Po 2023 ėjimų ant lentos lieka tik vienas skaičius c . Įrodykite, kad

$$c < 2024(a_1 + a_2 + \dots + a_{2024}).$$

4 uždutis. Raskite didžiausią tokį realiųjų skaičių α , kad visiems neneigiamiems realiesiems skaičiams x, y ir z galiojūt ši nelygybė:

$$(x+y+z)^3 + \alpha(x^2z + y^2x + z^2y) \geq \alpha(x^2y + y^2z + z^2x).$$

5 uždutis. Raskite visus tokius teigiamus realiuosius skaičius λ , kad kiekviena teigiamų realiųjų skaičių seka a_1, a_2, \dots , kuriai galioja

$$a_{n+1} = \lambda \cdot \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

visiems $n \geq 2024^{2024}$, būtų aprėžta.

Pastaba: Teigiamų realiųjų skaičių seka a_1, a_2, \dots yra *aprėžta* jeigu egzistuoja toks realusis skaičius M , kad $a_i < M$ visiems $i = 1, 2, \dots$

6 uždutis. *Labirintu* vadinsime sistemą iš 2024 urvų ir 2023 nesikertančių (abipusių) koridorių, iš kurių kiekvienas sujungia lygiai du urvus, taip pat iš kiekvieno urvo galima patekti į bet kurį kitą urvą vaikščiojant duotaisiais tuneliais. Pradžioje Erikas stovi kažkuriame koridoriuje, jungiančiame du urvus. Vienu ėjimu jis pereis per vieną iš urvų į kitą koridorių, kuris jungia tą urvą su trečiu urvu. Kiekvieną kartą taip padarius, koridorius, kuriame jis ką tik buvo, magiškai pradings. Vietoj jo atsiras naujas koridorius, jungiantis urvą, esantį dabartinio koridoriaus pabaigoje ir urvą, esantį praėjusio koridoriaus pradžioje (taigi, jei Erikas buvo koridoriuje, jungiančiame urvus a ir b ir praėjo urvą b į koridorių, kuris jungia urvus b ir c , tada dings koridorius, jungiantis urvus a ir b , bet atsiras naujas koridorius, jungiantis urvus a ir c).

Erikui labai patinka projektuoti labirintus ir jis sugalvojo labirintą, kurį nori sukurti. Jis galvoja, ar galėtų dabartinį labirintą paversti į savo sugalvotą, naudodamas šiuos ėjimus. Įrodykite, kad Erikas gali tai visada padaryti, nepriklausomai nuo pradinio labirinto ir pradinės vietos jame.

7 uždutis. Iš 45×45 dydžio lentelės buvo pašalintas centrinis langelis. Kokiems natūraliesiems skaičiams n įmanoma padalinti likusį lentelės plotą į $1 \times n$ ir $n \times 1$ stačiakampius?

8 uždutis. Duoti natūralieji skaičiai a, b, n , tenkinantys $a + b \leq n^2$. Agnė ir Benas žaidžia žaidimą ant (pradžioje nenuspalvintos) $n \times n$ dydžio lentos, atlikdami šiuos ėjimus:

- Pirmiausia, Agnė nudažo a langelių žaliai.
- Tada, Benas nudažo b kitų (nenuspalvintų) langelių mėlynai.

Agnė laimi, jei ji gali rasti kelią iš apatinio kairiojo į viršutinį dešinįjį langelį (kelias yra tokia langelių seka, kad bet kurie du iš eilės einantys langeliai turi bendrą kraštinę), sudarytą iš ne mėlynų langelių, kitu atveju laimi Benas. Nustatykite, priklausomai nuo a, b ir n reikšmių, kas turi laiminčią strategiją.

9 uždutis. Duota baigtinė aibė S . Duota, kad funkcija $f: S \rightarrow S$ yra n -tasis laipsnis (kur n yra natūralusis skaičius), jei egzistuoja funkcija $g: S \rightarrow S$, tenkinanti

$$f(x) = \underbrace{g(g(\dots g(x)\dots))}_{g \text{ pritaikyta } n \text{ kartų}}$$

kiekvienam $x \in S$.

Tarkime, funkcija $f: S \rightarrow S$ yra n -tasis laipsnis kiekvienam natūraliajam skaičiui n . Ar būtinai $f(f(x)) = f(x)$ visiems $x \in S$?

10 uždutis. Begalinės lentelės, kurios ašys sutampa su pasaulio kryptimis, vienetiniame langelyje tupi varlė. Varlė juda, šokdama per vieną ar du langelius kryptimi, į kurią yra pasisukusi, bei tada pasisukdama pagal šias taisykles:

- 1) Jei varlė šoko per vieną langelį, ji pasisuka 90° į dešinę;
- 2) Jei varlė šoko per du langelius, ji pasisuka 90° į kairę.

Ar varlė gali pasiekti langelį, esantį lygiai už 2024 langelių į šiaurę nuo pradinio langelio, jei pradžioje ji yra pasisukusi:

- a) į šiaurę;
- b) į rytus?

- 11 užduotis.** Keturkampis $ABCD$ yra įbrėžtinis, jo apibrėžtinio apskritimo centras yra O , o įstrižainės AC ir BD statmenos. X ir Y yra tokie apie trikampį BOD apibrėžto apskritimo taškai, kad $\angle AXO = \angle CYO = 90^\circ$. Taškas M yra kraštinės AC vidurio taškas. Įrodykite, kad BD yra apie trikampį MXY apibrėžto apskritimo liestinė.
- 12 užduotis.** Trikampis ABC yra smailusis, jo apibrėžtinis apskritimas yra ω ir $AB < AC$. M yra lanko BC , kuriame yra taškas A , vidurio taškas, o $X \neq M$ yra kitas toks taškas ant ω , kad $AX = AM$. Ant trikampio ABC kraštinių AC ir AB atitinkamai yra taip pažymėti taškai E ir F , kad $EX = EC$ ir $FX = FB$. Įrodykite, kad $AE = AF$.
- 13 užduotis.** Trikampis ABC yra smailusis, jo aukštinių sankirtos taškas yra H . Taškas D yra apie ABC apibrėžto apskritimo išorėje ir $\angle ABD = \angle DCA$. Tiesės AB atspindys tiesės BD atžvilgiu kerta tiesę CD taške X . Tiesės AC atspindys tiesės CD atžvilgiu kerta tiesę BD taške Y . Tiesė, einanti per X ir statmena AC , ir tiesė, einanti per Y ir statmena AB , kertasi taške P . Įrodykite, kad taškai D , P ir H yra vienoje tiesėje.
- 14 užduotis.** Trikampis ABC yra smailusis, jo apibrėžtinis apskritimas yra ω . ABC aukštinės AD , BE ir CF kertasi taške H . Tiesėje EF pasirenkamas toks taškas K , kad $KH \parallel BC$. Įrodykite, kad taško H atspindys tiesės KD atžvilgiu priklauso ω .
- 15 užduotis.** Duota tokia $N \geq 3$ plokštumos taškų aibė, kad jokie trys jos elementai nėra vienoje tiesėje. Trys aibės elementai A , B , C sudaro *baltišką trikampį* jeigu jokie kiti aibės elementai nėra ant apie ABC apibrėžto apskritimo. Tarkime, kad egzistuoja bent vienas baltiškas trikampis. Įrodykite, kad egzistuoja bent $\frac{N}{3}$ baltiški trikampiai.

16 užduotis. Raskite visus tokius sudėtinius natūraliuosius skaičius n , kad kiekvienam teigiamam skaičiaus n dalikliui d , egzistuoja tokie sveikieji $k \geq 0$ ir $m \geq 2$, kad $d = k^m + 1$.

17 užduotis. Ar egzistuoja be galo daug tokių natūraliųjų skaičių ketvertų (a, b, c, d) , kad skaičius $a^a + b^b - c^c - d^d$ yra pirminis ir $2 \leq d \leq c \leq b \leq a \leq d^{2024}$?

18 užduotis. Begalinė natūraliųjų skaičių seka a_1, a_2, \dots yra tokia, kad $a_n \geq 2$ ir, kad a_{n+2} dalys $a_{n+1} + a_n$ visiems $n \geq 1$. Įrodykite, kad egzistuoja pirminis, kuris dalys be galo daug šios sekos narių.

19 užduotis. Ar egzistuoja toks natūralusis skaičius N , kuris dalinasi iš bent 2024 skirtingų pirminių skaičių ir kurio teigiamieji dalikliai $1 = d_1 < d_2 < \dots < d_k = N$ yra tokie, kad skaičius

$$\frac{d_2}{d_1} + \frac{d_3}{d_2} + \dots + \frac{d_k}{d_{k-1}}$$

yra sveikasis?

20 užduotis. Natūralieji skaičiai a, b ir c tenkina lygčių sistemą:

$$\begin{cases} (ab - 1)^2 = c(a^2 + b^2) + ab + 1, \\ a^2 + b^2 = c^2 + ab. \end{cases}$$

a) Įrodykite, kad $c + 1$ yra sveikąjo skaičiaus kvadratas.

b) Raskite visus tokius skaičių (a, b, c) trejetus.