



Tid til rådighet: 4 timer og 30 minutter.  
Spørsmål kan stilles de første 30 minuttene.  
Kun skrive- og tegneredskaper tillat.

**Oppgave 1.** La  $\alpha \neq 0$  være et reelt tall. Finn alle funksjoner  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  slik at

$$xf(x+y) = (x+\alpha y)f(x) + xf(y)$$

for alle  $x, y \in \mathbb{R}$ .

**Oppgave 2.** La  $\mathbb{R}^+$  betegne mengden av positive reelle tall. Finn alle funksjoner  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  slik at

$$\frac{f(a)}{1+a+ca} + \frac{f(b)}{1+b+ab} + \frac{f(c)}{1+c+bc} = 1$$

for alle  $a, b, c \in \mathbb{R}^+$  som tilfredsstiller  $abc = 1$ .

**Oppgave 3.** På en tavle er det skrevet positive reelle tall  $a_1, a_2, \dots, a_{2024}$ . Et trekk består av å velge to tall  $x$  og  $y$ , fjerne de, og skrive opp tallet  $\frac{x^2 + 6xy + y^2}{x+y}$ . Etter 2023 trekk gjenstår det ett tall  $c$ .

Vis at

$$c < 2024(a_1 + a_2 + \dots + a_{2024}).$$

**Oppgave 4.** Finn det største reelle tallet  $\alpha$  slik at for alle ikke-negative reelle tall  $x, y$  og  $z$ , holder følgende ulikhet:

$$(x+y+z)^3 + \alpha(x^2z + y^2x + z^2y) \geq \alpha(x^2y + y^2z + z^2x).$$

**Oppgave 5.** Finn alle positive reelle tall  $\lambda$  slik at alle følger  $a_1, a_2, \dots$  av positive reelle tall som oppfyller

$$a_{n+1} = \lambda \cdot \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

for alle  $n \geq 2024^{2024}$ , er begrensede.

*Bemerkning:* En følge  $a_1, a_2, \dots$  av positive reelle tall er *begrenset* hvis det finnes et reelt tall  $M$  slik at  $a_i < M$  for alle  $i = 1, 2, \dots$

**Oppgave 6.** En *labyrint* er et hulesystem bestående av 2024 huler og 2023 (to-veis) korridorer, som ikke treffer hverandre, slik at alle korridorer forbinder nøyaktig to huler, og alle par av huler er forbundet via én eller flere korridorer. Til å begynne med står Tristan Amadeus i en korridor mellom to huler. Et trekk består av at Tristan Amadeus går inn i en hule og ut i en ny korridor. Da vil korridoren han forlot på magisk vis forsvinne, og det vil oppstå en ny korridor mellom hulen han ikke gikk inn i, og hulen han vil nå dersom han fortsetter å gå gjennom korridoren han er i (dvs. hvis Tristan Amadeus var i en korridor som forbinder hule  $a$  og  $b$ , og går til en korridor som forbinder hule  $b$  og  $c$ , vil korridoren mellom  $a$  og  $b$  forsvinne, og en korridor mellom  $a$  og  $c$  vil oppstå).

Tristan Amadeus liker å designe labyrinter. Han har et spesifikt layout han gjerne vil lage, og lurer på om han kan transformere labyrinten han befinner seg i til dette ønskede layoutet. Vis at dette alltid er mulig uansett hvordan labyrinten han starter i ser ut og uansett hvor i denne labyrinten han starter.

**Oppgave 7.** I et rutenett på størrelse  $45 \times 45$  fjerner vi den midterste ruten. Finn alle positive heltall  $n$  som er slik at man kan kutte opp det resterende arealet i rektangler på størrelse  $1 \times n$  og  $n \times 1$ .

**Oppgave 8.** La  $a$ ,  $b$  og  $n$  være positive heltall slik at  $a + b \leq n^2$ . Andreas og Bnotøy spiller et spill på et (initielt ufarget)  $n \times n$  rutenett som følger:

- Andreas starter med å male  $a$  ruter grønne.
- Bnotøy maler deretter  $b$  andre (ufargede) ruter blå.

Andreas vinner hvis han kan finne en sti av ikke-blå ruter som starter i ruten nederst til venstre og ender i ruten øverst til høyre (der en sti er en følge av ruter slik at to påfølgende ruter i følgen deler en side), ellers vinner Bnotøy. Bestem, uttrykt ved  $a$ ,  $b$  og  $n$ , hvem som har en vinnende strategi.

**Oppgave 9.** La  $S$  være en endelig mengde. For et positivt heltall  $n$  sier vi at funksjonen  $f: S \rightarrow S$  er en  $n$ -te potens hvis det finnes en funksjon  $g: S \rightarrow S$  slik at

$$f(x) = \underbrace{g(g(\dots g(x)\dots))}_{g \text{ evaluert } n \text{ ganger}}$$

for hver  $x \in S$ .

Anta at en funksjon  $f: S \rightarrow S$  er en  $n$ -te potens for hvert positive heltall  $n$ . Er det nødvendigvis sant at  $f(f(x)) = f(x)$  for hver  $x \in S$ ?

**Oppgave 10.** En hybelkanin befinner seg i et enhetskvadrat på et uendelig rutenett orientert med himmelretningene. Hybelkaninen gjør trekk bestående av å hoppe enten én eller to ruter i retningen den er vendt, og snur seg etter følgende regler:

- 1) Hvis hybelkaninen hopper én rute, snur den seg  $90^\circ$  til høyre;
- 2) Hvis hybelkaninen hopper to ruter, snur den seg  $90^\circ$  til venstre

Er det mulig for hybelkaninen å nå kvadratet som er 2024 kvadrater nord for det initielle kvadratet etter et endelig antall trekk hvis den initielt er vendt mot:

- a) nord;
- b) øst?

**Oppgave 11.** La  $ABCD$  være en syklisk firkant med omsenter  $O$  slik at  $AC$  og  $BD$  står normalt på hverandre. Punktene  $X$  og  $Y$  ligger på omsirkelen til trekant  $BOD$  slik at  $\angle AXO = \angle CYO = 90^\circ$ . La  $M$  være midtpunktet på  $AC$ . Vis at  $BD$  tangerer omsirkelen til trekant  $MX Y$ .

**Oppgave 12.** La  $ABC$  være en spissvinklet trekant med omsirkel  $\omega$  slik at  $AB < AC$ . La  $M$  være midtpunktet på buen  $BC$  av  $\omega$  som inneholder  $A$ , og la  $X \neq M$  være det andre punktet på  $\omega$  slik at  $AX = AM$ . La  $E$  og  $F$  være punkter på henholdsvis sidene  $AC$  og  $AB$  i trekant  $ABC$  slik at  $EX = EC$  og  $FX = FB$ . Vis at  $AE = AF$ .

**Oppgave 13.** La  $ABC$  være en spissvinklet trekant med ortosenter  $H$ . La  $D$  være et punkt utenfor omsirkelen til trekant  $ABC$  slik at  $\angle ABD = \angle DCA$ . Refleksjonen av  $AB$  over  $BD$  møter  $CD$  i  $X$ , og refleksjonen av  $AC$  over  $CD$  møter  $BD$  i  $Y$ . Linjen som går gjennom  $X$  og står normalt på  $AC$  møter linjen som går gjennom  $Y$  og står normalt på  $AB$  i punktet  $P$ . Vis at punktene  $D$ ,  $P$  og  $H$  er kollineære.

**Oppgave 14.** La  $ABC$  være en spissvinklet trekant med omsirkel  $\omega$ . Høydene  $AD$ ,  $BE$  og  $CF$  i trekant  $ABC$  møter i punktet  $H$ , og punktet  $K$  på linjen  $EF$  oppfyller  $KH \parallel BC$ . Vis at refleksjonen av  $H$  over  $KD$  ligger på  $\omega$ .

**Oppgave 15.** Vi er gitt en mengde med  $N \geq 3$  punkter i planet, slik at ingen tre punkter ligger på linje. Tre punkter  $A, B$  og  $C$  i mengden danner en *batlisk trekant* dersom ingen andre punkter i mengden ligger på omsirkelen til trekant  $ABC$ . Anta at det er minst en batlisk trekant.

Vis at det er minst  $\frac{N}{3}$  batliske trekanter.

**Oppgave 16.** Bestem alle sammensatte positive tall  $n$  slik at for alle positive divisorer  $d$  av  $n$ , finnes det heltall  $k \geq 0$  og  $m \geq 2$  slik at  $d = k^m + 1$ .

**Oppgave 17.** Finnes det uendelig mange kvadrupler av positive heltall  $(a, b, c, d)$  slik at  $a^{a!} + b^{b!} - c^{c!} - d^{d!}$  er et primtall og  $2 \leq d \leq c \leq b \leq a \leq d^{2024}$ ?

**Oppgave 18.** En uendelig følge av positive heltall  $a_1, a_2, \dots$  er slik at  $a_n \geq 2$  og  $a_{n+2}$  deler  $a_{n+1} + a_n$  for alle  $n \geq 1$ . Vis at det finnes et primtall som deler uendelig mange elementer i følgen.

**Oppgave 19.** Finnes det et positivt heltall  $N$  som er delelig med minst 2024 forskjellige primtall og har divisorer  $1 = d_1 < d_2 < \dots < d_k = N$  som er slik at

$$\frac{d_2}{d_1} + \frac{d_3}{d_2} + \dots + \frac{d_k}{d_{k-1}}$$

er et heltall?

**Oppgave 20.** Positive heltall  $a, b$  og  $c$  tilfredsstiller likningssystemet

$$\begin{cases} (ab - 1)^2 = c(a^2 + b^2) + ab + 1, \\ a^2 + b^2 = c^2 + ab. \end{cases}$$

- Vis at  $c + 1$  er et kvadrattall.
- Finn alle slike tripler  $(a, b, c)$ .