Bałtycki Szlak

16 listopada 2024 r., Tartu, Estonia

Version: Polish

Czas pracy: 4 godziny i 30 minut.
Pytania można zadawać w ciągu początkowych 30 minut.
Dopuszczalne jest posiadanie jedynie przyborów do pisania i rysowania.

Zadanie 1. Dana jest liczba rzeczywista $\alpha \neq 0$. Znaleźć (w zależności od α) wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające równość

$$xf(x+y) = (x+\alpha y)f(x) + xf(y)$$

dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$.

Zadanie 2. Niech $\mathbb{R}^+$ oznacza zbiór dodatnich liczb rzeczywistych. Znaleźć wszystkie funkcje $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ spełniające

$$\frac{f(a)}{1+a+ca} + \frac{f(b)}{1+b+ab} + \frac{f(c)}{1+c+bc} = 1$$

dla wszystkich $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ takich, że $abc = 1$.

Zadanie 3. Na tablicy napisano dodatnie liczby rzeczywiste $a_1, a_2, \ldots, a_{2024}$. W pojedynczym ruchu zmazuje się dwie liczby (x i y) napisane na tablicy i zamiast nich zapisuje liczbę $\dfrac{x^2+6xy+y^2}{x+y}$. Po wykonaniu 2023 ruchów na tablicy pozostanie jedna liczba c. Wykazać, że

$$c < 2024\left(a_1 + a_2 + \ldots + a_{2024}\right).$$

Zadanie 4. Znaleźć największą stałą rzeczywistą α taką, że poniższa nierówność zachodzi dla wszystkich nieujemnych liczb rzeczywistych x, y, z:

$$(x+y+z)^3 + \alpha\left(x^2z + y^2x + z^2y\right) \geqslant \alpha\left(x^2y + y^2z + z^2x\right).$$

Zadanie 5. Znaleźć wszystkie stałe rzeczywiste $\lambda > 0$ takie, że dowolny ciąg dodatnich liczb rzeczywistych $a_1, a_2, \ldots$ spełniający

$$a_{n+1} = \lambda \cdot \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$$

dla $n \geqslant 2024^{2024}$ jest ograniczony.

Uwaga: Ciąg dodatnich liczb rzeczywistych jest ograniczony, jeśli istnieje taka stała M, że $a_i < M$ dla $i = 1, 2, \ldots$.

Zadanie 6. *Labiryntem* nazwiemy system 2024 jaskiń połączonych 2023 nieprzecinającymi się, dwukierunkowymi korytarzami, przy czym każdy korytarz łączy dokładnie dwie jaskinie oraz każda para jaskiń jest połączona pewnym ciągiem korytarzy. Na początku Voldemar stoi w korytarzu łączącym pewne dwie jaskinie. Ruch polega na przejściu przez jaskinię do innego korytarza, który łączy ją z inną, trzecią jaskinią. Jednakże, kiedy to zrobi, korytarz, w którym stał magicznie zniknie i zostanie zastąpiony przez korytarz łączący koniec jego nowego korytarza z początkiem starego (tzn. jeśli Voldemar był w korytarzu łączącym jaskinie a z b i przeszedł przez b do korytarza łączącego b z c, to korytarz z a do b znika, a pojawia się korytarz łączący a z c).

Voldemar lubi projektować labirynty i ma pewien konkretny układ korytarzy na myśli. Zastanawia się, czy z wyjściowego labiryntu jest w stanie uzyskać jego wymarzony wykonując opisane ruchy. Udowodnić, że jest to możliwe, niezależnie od wyjściowego labiryntu i wyboru korytarza, w którym zaczyna.

Zadanie 7. Dana jest plansza 45×45, z której usunięto środkowe pole. Dla jakich dodatnich liczb całkowitych n możliwe jest rozcięcie pozostałych pól na prostokąty $1 \times n$ i $n \times 1$?

Zadanie 8. Niech a, b, n będą takimi dodatnimi liczbami całkowitymi, że $a+b \leqslant n^2$. Iga i Robert grają na (początkowo niepokolorowanej) planszy $n \times n$ w następującą grę:

- Najpierw Iga koloruje a pól na zielono.
- Następnie Robert koloruje b innych (niepokolorowanych) pól na błękitno.

Iga wygrywa, jeśli w tym momencie może znaleźć ścieżkę złożoną wyłącznie z niebłękitnych pól, która zaczyna się w lewym dolnym polu, a kończy w prawym górnym polu tej planszy (ścieżka to taki ciąg pól, że każde dwa kolejne pola mają wspólny bok). W przeciwnym wypadku wygrywa Robert. Rozstrzygnąć, w zależności od a, b, n, kto ma strategię wygrywającą.

Zadanie 9. Niech S będzie zbiorem skończonym. Dla dodatniej liczby całkowitej n mówimy, że funkcja $f\colon S \to S$ jest *n-tą potęgą*, jeśli istnieje taka funkcja $g\colon S \to S$, że

$$f(x) = \underbrace{g(g(\ldots g(x)\ldots))}_{g \text{ występuje } n \text{ razy}}$$

dla wszystkich $x \in S$.

Załóżmy, że funkcja $f\colon S \to S$ jest n-tą potęgą dla wszystkich dodatnich liczb całkowitych n. Rozstrzygnąć, czy musi zachodzić $f(f(x)) = f(x)$ dla wszystkich $x \in S$.

Zadanie 10. Żaba stoi na polu nieskończonej szachownicy, składającej się z kwadratów jednostkowych, których boki pokrywają się z głównymi kierunkami geograficznymi. Żaba wykonuje skoki długości 1 lub 2 w kierunku, w którym jest zwrócona, a następnie obraca się zgodnie z następującymi zasadami:

1) jeśli wykonała skok długości 1 to obraca się o 90° w prawo,
2) jeśli wykonała skok długości 2 to obraca się o 90° w lewo.

Rozstrzygnąć, czy żaba może przemieścić się o dokładnie 2024 pola na północ od początkowego położenia, jeśli najpierw zwrócona była w kierunku:

a) północnym?
b) wschodnim?

Zadanie 11. Dany jest czworokąt cykliczny $ABCD$ wpisany w okrąg o środku O oraz prostopadłych przekątnych AC i BD. Punkty X i Y leżą na okręgu opisanym na trójkącie BOD tak, że $\angle AXO = \angle CYO = 90^\circ$. Niech M będzie środkiem AC. Udowodnić, że prosta BD jest styczna do okręgu opisanego na trójkącie MXY.

Zadanie 12. Okrąg ω jest opisany na trójkącie ostrokatnym ABC, w którym $AB < AC$. Niech M będzie środkiem tego łuku BC okręgu ω, który zawiera punkt A. Punkt $X \neq M$ to drugi taki punkt na ω, że $AX = AM$. Na bokach AC i AB wybrano takie punkty E i F, że $EX = EC$ i $FX = FB$. Udowodnić, że $AE = AF$.

Zadanie 13. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC o ortocentrum H. Punkt D leży na zewnątrz okręgu opisanego na trójkącie ABC tak, że $\angle ABD = \angle DCA$. Prosta symetryczna do AB względem BD przecina CD w punkcie X, a prosta symetryczna do AC względem CD przecina BD w punkcie Y. Proste przechodzące przez X i Y prostopadłe, odpowiednio, do AC i AB przecinają się w punkcie P. Udowodnić, że punkty D, P i H są współliniowe.

Zadanie 14. Okrąg ω jest opisany na trójkącie ostrokątnym ABC. Wysokości AD, BE i CF tego trójkąta przecinają się w punkcie H. Punkt K wybrano na prostej EF tak, że $KH \parallel BC$. Udowodnić, że odbicie H względem prostej KD leży na ω.

Zadanie 15. Dany jest zbiór $N \geqslant 3$ punktów leżących na płaszczyźnie tak, że żadne trzy z nich nie są współliniowe. Powiemy, że trzy punkty A, B, C, należące do tego zbioru, tworzą *bałtycki trójkąt*, jeśli żaden inny punkt tego zbioru nie leży na okręgu opisanym na trójkącie ABC. Załóżmy, że istnieje przynajmniej jeden bałtycki trójkąt.

Wykazać, że istnieje przynajmniej $\dfrac{N}{3}$ bałtyckich trójkątów.

Zadanie 16. Wyznaczyć wszystkie takie dodatnie liczby złożone n, że każdy ich dodatni dzielnik d można przedstawić w postaci $k^m + 1$ dla pewnych liczb całkowitych $k \geqslant 0$ oraz $m \geqslant 2$.

Zadanie 17. Rozstrzygnąć, czy istnieje nieskończenie wiele takich czwórek dodatnich liczb całkowitych (a, b, c, d), że $a^{a!} + b^{b!} - c^{c!} - d^{d!}$ jest liczbą pierwszą oraz $2 \leqslant d \leqslant c \leqslant b \leqslant a \leqslant d^{2024}$.

Zadanie 18. Dany jest taki ciąg dodatnich liczb całkowitych $a_1, a_2, \ldots$, że $a_n \geqslant 2$ oraz $a_{n+2} | a_{n+1} + a_n$ dla dowolnego $n \geqslant 1$. Udowodnić, że istnieje liczba pierwsza, która dzieli nieskończenie wiele wyrazów tego ciągu.

Zadanie 19. Rozstrzygnąć, czy istnieje taka dodatnia liczba całkowita N podzielna przez co najmniej 2024 różnych liczb pierwszych, że jeśli $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_k = N$ to jej wszystkie dodatnie dzielniki, to

$$\frac{d_2}{d_1} + \frac{d_3}{d_2} + \ldots + \frac{d_k}{d_{k-1}}$$

jest liczbą całkowitą.

Zadanie 20. Dane są dodatnie liczby całkowite a, b, c spełniające układ równań

$$\begin{cases} (ab-1)^2 = c\left(a^2+b^2\right) + ab + 1, \\ a^2 + b^2 = c^2 + ab. \end{cases}$$

a) Wykazać, że $c + 1$ jest kwadratem liczby całkowitej.

b) Wyznaczyć wszystkie trójki (a, b, c) spełniające dany układ równań.