



Tid: 4 timmar och 30 minuter.
Under de första 30 minuterna kan frågor ställas till juryn.
Endast skriv- och ritverktyg är tillåtna.

Problem 1. Låt α vara ett nollskilt reellt tal. Bestäm alla funktioner $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sådana att

$$xf(x+y) = (x+\alpha y)f(x) + xf(y)$$

för alla $x, y \in \mathbb{R}$.

Problem 2. Låt \mathbb{R}^+ beteckna mängden av alla positiva reella tal. Bestäm alla funktioner $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ sådana att

$$\frac{f(a)}{1+a+ca} + \frac{f(b)}{1+b+ab} + \frac{f(c)}{1+c+bc} = 1$$

för alla $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ som uppfyller $abc = 1$.

Problem 3. På en tavla står de positiva reella talen $a_1, a_2, \dots, a_{2024}$ skrivna. Ett drag består av att välja två tal x och y på tavlan, sudda ut dem och istället skriva upp talet $\frac{x^2 + 6xy + y^2}{x+y}$. Efter 2023 drag kommer endast ett tal c att finnas kvar. Bevisa att

$$c < 2024(a_1 + a_2 + \dots + a_{2024}).$$

Problem 4. Bestäm det största reella talet α sådant att för alla icke-negativa reella tal x, y och z så gäller följande olikhet:

$$(x+y+z)^3 + \alpha(x^2z + y^2x + z^2y) \geq \alpha(x^2y + y^2z + z^2x).$$

Problem 5. Bestäm alla positiva reella tal λ sådana att varje följd a_1, a_2, \dots av positiva reella tal som uppfyller

$$a_{n+1} = \lambda \cdot \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

för alla $n \geq 2024^{2024}$ är begränsad.

Anmärkning: En följd a_1, a_2, \dots av positiva reella tal är *begränsad* om det finns ett reellt tal M sådant att $a_i < M$ för alla $i = 1, 2, \dots$

Problem 6. En *labyrinth* är ett system av 2024 grottor och 2023 korridorer, där varje korridor förbinder exakt två grottor, och varje par av grottor är förbundna via någon följd av korridorer. Erik står initialt i en korridor som förbinder två grottor. I ett drag kan han gå igenom en av grottorna till en annan korridor som förbinder den grottan med en tredje grotta. Dock kommer då den korridor han precis befann sig i att magiskt försvinna och ersättas med en ny korridor som förbinder slutet på hans nya korridor med början på hans gamla korridor (dvs. om Erik befann sig i en korridor som förbinder grottorna a och b , och han gick genom grotta b till en korridor som förbinder b och c , så kommer korridoren mellan a och b att försvinna och en ny korridor mellan a och c att skapas).

Eftersom Erik tycker om att designa labyrinth och har en specifik design i åtanke för sin nästa labyrinth, undrar han om han kan omvandla labyrinth till denna design med hjälp av en serie drag. Bevisa att detta faktiskt är möjligt, oavsett hans startposition samt den ursprungliga konfigurationen.

Problem 7. I ett 45×45 -rutnät har rutan i mitten tagits bort. För vilka positiva heltal n är det möjligt att dela upp det återstående området i $1 \times n$ - och $n \times 1$ -rektanglar?

Problem 8. Låt a , b och n vara positiva heltal sådana att $a + b \leq n^2$. Andrew och Baron spelar ett spel på ett $n \times n$ -rutnät enligt följande regler:

- Först färgar Andrew a rutor gröna.
- Därefter färgar Baron b andra (dvs. ofärgade) rutor blå.

Andrew vinner om han kan hitta en väg av icke-blå rutor som börjar i det nedre vänstra hörnet och slutar i det övre högra hörnet (där en väg är en följd av rutor sådana att varje par av på varandra följande rutor har en gemensam sida), annars vinner Baron. Avgör för varje a , b och n vem som har en vinnande strategi.

Problem 9. Låt S vara en ändlig mängd. För ett positivt heltal n säger vi att en funktion $f: S \rightarrow S$ är en n :te potens om det existerar en funktion $g: S \rightarrow S$ sådan att

$$f(x) = \underbrace{g(g(\dots g(x)\dots))}_{n \text{ gånger}}$$

för varje $x \in S$.

Antag att en funktion $f: S \rightarrow S$ är en n :te potens för varje positivt heltal n . Är det nödvändigtvis sant att $f(f(x)) = f(x)$ för varje $x \in S$?

Problem 10. En groda befinner sig på en ruta i ett oändligt rutnät vars rader och kolumner är orienterade enligt väderstrecken. Från början tittar grodan mot något väderstreck. I ett drag hoppar grodan antingen en eller två rutor i den riktning den tittar, och måste sedan vända sig enligt följande regler:

- 1) Om grodan hoppar en ruta så vänder den sig sedan 90° åt höger;
- 2) Om grodan hoppar två rutor så vänder den sig sedan 90° åt vänster.

Är det möjligt för grodan att nå rutan som är exakt 2024 rutor norr om startpunkten efter ett ändligt antal drag, om den initialt tittar mot:

- a) Norr?
- b) Öster?

Problem 11. Låt $ABCD$ vara en cyklisk fyrhörning sådan att AC är vinkelrät mot BD , och låt O vara dess omskrivna cirkels medelpunkt. Punkterna X och Y ligger på den omskrivna cirkeln till triangeln BOD och är sådana att $\angle AXO = \angle CYO = 90^\circ$. Låt M vara mittpunkten på AC . Visa att BD tangerar den omskrivna cirkeln till triangeln MXY .

Problem 12. Låt ABC vara en spetsvinklig triangel med omskriven cirkel ω sådan att $AB < AC$. Låt M vara mittpunkten på cirkelbågen BC av ω som innehåller punkten A , och låt $X \neq M$ vara den andra punkten på ω sådan att $AX = AM$. Punkterna E och F väljs på sidorna AC respektive AB i triangeln ABC så att $EX = EC$ och $FX = FB$. Visa att $AE = AF$.

Problem 13. Låt ABC vara en spetsvinklig triangel vars höjder skär varandra i punkten H . Låt D vara en punkt utanför den omskrivna cirkeln till triangeln ABC sådan att $\angle ABD = \angle DCA$. Speglingen av AB i BD skär linjen CD i punkten X . Speglingen av AC i CD skär linjen BD i punkten Y . Linjerna genom X och Y som är vinkelräta mot AC respektive AB skär varandra i punkten P . Visa att punkterna D , P och H ligger på en linje.

Problem 14. Låt ABC vara en spetsvinklig triangel med omskriven cirkel ω . Höjderna AD , BE och CF i triangeln ABC skär varandra i punkten H . En punkt K väljs på linjen EF sådan att $KH \parallel BC$. Visa att speglingen av H i linjen KD ligger på ω .

Problem 15. Givet är en mängd av $N \geq 3$ punkter i planet, sådana att inga tre av dem ligger på en linje. Tre punkter A, B, C i mängden sägs bilda en *baltisk triangel* om ingen annan punkt i mängden ligger på den omskrivna cirkeln till triangeln ABC . Antag att det finns minst en baltisk triangel.

Visa att det finns minst $\frac{N}{3}$ baltiska trianglar.

Problem 16. Bestäm alla sammansatta positiva heltal n sådana att, för varje positiv delare d till n , så existerar det heltal $k \geq 0$ och $m \geq 2$ sådana att $d = k^m + 1$.

Problem 17. Finns det oändligt många uppsättningar positiva heltal (a, b, c, d) sådana att talet $a^a + b^b - c^c - d^d$ är ett primtal och $2 \leq d \leq c \leq b \leq a \leq d^{2024}$?

Problem 18. En oändlig talföljd a_1, a_2, \dots av positiva heltal är sådan att $a_n \geq 2$ och a_{n+2} delar $a_{n+1} + a_n$ för alla $n \geq 1$. Visa att det existerar ett primtal som delar oändligt många tal i följen.

Problem 19. Existerar det ett positivt heltal N som är delbart med minst 2024 olika primtal, och vars positiva delare $1 = d_1 < d_2 < \dots < d_k = N$ är sådana att talet

$$\frac{d_2}{d_1} + \frac{d_3}{d_2} + \dots + \frac{d_k}{d_{k-1}}$$

är ett heltal?

Problem 20. De positiva heltalen a, b och c uppfyller ekvationssystemet

$$\begin{cases} (ab - 1)^2 = c(a^2 + b^2) + ab + 1, \\ a^2 + b^2 = c^2 + ab. \end{cases}$$

a) Visa att $c + 1$ är ett kvadrattal.

b) Bestäm alla sådana tripplar (a, b, c) .