Baltic Way

16 листопада 2024, Тарту, Естонія   Version: Ukrainian

Час виконання: 4 години 30 хвилин.
Запитання можна ставити протягом перших 30 хвилин.
Дозволені лише інструменти для письма та креслення.

Задача 1. Нехай α - ненульове дійсне число. Знайдіть усі функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такі, що:

$$xf(x+y) = (x+\alpha y)f(x) + xf(y)$$

для всіх $x, y \in \mathbb{R}$.

Задача 2. Нехай $\mathbb{R}^+$ - множина всіх додатних дійсних чисел. Знайдіть усі функції $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ такі, що:

$$\frac{f(a)}{1+a+ca} + \frac{f(b)}{1+b+ab} + \frac{f(c)}{1+c+bc} = 1$$

для всіх $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ таких, що $abc = 1$.

Задача 3. Додатні дійсні числа $a_1, a_2, \ldots, a_{2024}$ записані на дошці. За один хід вибирають два числа x і y, що записані на дошці, їх стирають та записують число $\frac{x^2+6xy+y^2}{x+y}$. Після 2023 ходів на дошці залишиться одне число c. Доведіть, що:

$$c < 2024(a_1 + a_2 + \ldots + a_{2024}).$$

Задача 4. Знайдіть найбільше дійсне число α таке, що для всіх невід'ємних дійсних чисел x, y і z виконується нерівність:

$$(x+y+z)^3 + \alpha(x^2z + y^2x + z^2y) \geq \alpha(x^2y + y^2z + z^2x).$$

Задача 5. Знайдіть усі додатні дійсні числа λ такі, що кожна послідовність $a_1, a_2, \ldots$ додатних дійсних чисел така, що:

$$a_{n+1} = \lambda \cdot \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$$

для всіх $n \geq 2024^{2024}$, є обмеженою.

Примітка: Послідовність $a_1, a_2, \ldots$ додатних дійсних чисел є *обмеженою*, якщо існує дійсне число M таке, що $a_i < M$ для всіх $i = 1, 2, \ldots$

Задача 6. *Лабіринт* - це система з 2024 печер та 2023 (двосторонніх) коридорів, що не перетинаються, де кожний коридор з'єднує рівно дві печери, а з кожної печери можна дістатись до будь-якої іншої через певну послідовність коридорів. Спочатку Ерік стоїть у коридорі, що з'єднує якісь дві печери. За один хід він може пройти через одну з печер у інший коридор, що з'єднує цю печеру з третьою печерою. Однак, при цьому коридор, яким він щойно пройшов, магічним чином зникне і буде замінений новим коридором, який з'єднує кінець його нового коридору з початком його старого коридору (тобто, якщо Ерік був у коридорі, що з'єднував печери a і b, і пройшов через печеру b у коридор, що з'єднує печери b і c, то коридор між печерами a і b зникне, а новий коридор з'явиться між печерами a і c).

Оскільки Ерік любить придумувати лабіринти і має особливий задум для свого наступного лабіринту, він цікавиться, чи може він перетворити лабіринт у той, який він задумав, використовуючи ці ходи. Доведіть, що це дійсно можливо незалежно від початкового лабіринту і положення Еріка в ньому.

Задача 7. З квадратної дошки 45×45 прибрали центральну клітинку. Для яких додатних цілих чисел n можливо розрізати решту дошки на прямокутники $1 \times n$ і $n \times 1$?

Задача 8. Нехай a, b, n - додатні цілі числа такі, що $a + b \leq n^2$. Стефанія та Степанко грають гру на (спочатку незафарбованій) дошці $n \times n$ таким чином:

- Спочатку Стефанія фарбує a клітинок у зелений колір.
- Потім Степанко фарбує b інших (незафабованих) клітинок у синій колір.

Стефанія виграє, якщо вона може знайти шлях з не синіх клітинок, що починається з нижньої лівої клітинки і закінчується у верхній правій клітинці (де шляхом є послідовність клітинок, такі, що дві сусідні мають спільну сторону), інакше виграє Степанко. Визначте, в залежності від a, b та n, хто має виграшну стратегію.

Задача 9. Нехай S - скінченна множина. Для додатного цілого n функція $f\colon S \to S$ є *n-им степенем*, якщо існує деяка функція $g\colon S \to S$ така, що

$$f(x) = \underbrace{g(g(\ldots g(x)\ldots))}_{g \text{ використано } n \text{ разів}}$$

для кожного $x \in S$. Припустимо, що функція $f\colon S \to S$ є n-им степенем для кожного додатного цілого n. Чи обов'язково $f(f(x)) = f(x)$ виконується для кожного $x \in S$?

Задача 10. Жаба розташована на клітинці нескінченної дошки, орієнтованої за сторонами світу. За один хід жаба стрибає на одну або на дві клітинки у напрямку, в якому вона дивиться, а потім розвертається згідно наступних правил:

(1) Якщо жаба стрибає на одну клітинку, вона повертається на $90°$ праворуч;

(2) Якщо жаба стрибає на дві клітинки, вона повертається на $90°$ ліворуч.

Чи можливо, щоб жаба досягла клітинки, що знаходиться рівно на 2024 клітинки на північ від початкової клітинки, після скінченної кількості ходів, якщо спочатку вона дивиться:

(а) на північ;

(б) на схід?

Задача 11. Нехай $ABCD$ — вписаний чотирикутник із центром описаного кола O такий, що AC перпендикулярно до BD. Точки X і Y вибрано на описаному колі трикутника BOD так, що $\angle AXO = \angle CYO = 90°$. Нехай M — середина відрізка AC. Доведіть, що BD дотикається до описаного кола трикутника MXY.

Задача 12. Нехай ABC — гострокутний трикутник із описаним колом ω, причому $AB < AC$. Нехай M — середина дуги BC кола ω, що містить точку A, і нехай $X \neq M$ — інша точка на ω, така, що $AX = AM$. Точки E та F вибрані на сторонах AC та AB трикутника ABC відповідно так, що $EX = EC$ і $FX = FB$. Доведіть, що $AE = AF$.

Задача 13. Нехай ABC — гострокутний трикутник з ортоцентром H. Нехай D — точка поза описаним колом трикутника ABC, така, що $\angle ABD = \angle DCA$. Відображення AB відносно BD перетинає CD у точці X. Відображення AC відносно CD перетинає BD у точці Y. Прямі, перпендикулярні до AC і AB, що проведені через точки X і Y відповідно, перетинаються в точці P. Доведіть, що точки D, P і H колінеарні.

Задача 14. Нехай ABC — гострокутний трикутник із описаним колом ω. Висоти AD, BE і CF трикутника ABC перетинаються в точці H. Точка K вибрана на прямій EF так, що $KH \parallel BC$. Доведіть, що відображення точки H відносно KD лежить на ω.

Задача 15. Нехай задано множину з $N \geq 3$ точок на площині, жодні три з яких не лежать на одній прямій. Три точки A, B, C з цієї множини називаються *Балтійським трикутником*, якщо жодна інша точка з цієї множини не лежить на описаному колі трикутника ABC. Припустимо, що існує хоча б один Балтійський трикутник.

Доведіть, що існує щонайменше $\dfrac{N}{3}$ Балтійських трикутників.

Задача 16. Знайдіть всі складені додатні цілі числа n такі, що для кожного додатного дільника d числа n існують цілі числа $k \geq 0$ та $m \geq 2$ такі, що $d = k^m + 1$.

Задача 17. Чи існує нескінченно багато четвірок (a, b, c, d) додатних цілих чисел таких, що число $a^{a!} + b^{b!} - c^{c!} - d^{d!}$ є простим та $2 \leq d \leq c \leq b \leq a \leq d^{2024}$?

Задача 18. Нескінченна послідовність додатних цілих чисел $a_1, a_2, \ldots$ така, що $a_n \geq 2$ та a_{n+2} ділить $a_{n+1} + a_n$ для всіх $n \geq 1$. Доведіть, що існує просте число, яке є дільником нескінченної кількості членів цієї послідовності.

Задача 19. Чи існує додатне ціле число N, яке ділиться принаймні на 2024 попарно різних простих чисел і чиї додатні дільники $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_k = N$ такі, що число

$$\frac{d_2}{d_1} + \frac{d_3}{d_2} + \ldots + \frac{d_k}{d_{k-1}}$$

є цілим?

Задача 20. Додатні цілі числа a, b та c задовольняють систему рівнянь

$$\begin{cases} (ab-1)^2 = c\left(a^2+b^2\right) + ab + 1, \\ a^2 + b^2 = c^2 + ab. \end{cases}$$

(а) Доведіть, що $c + 1$ є точним квадратом.

(б) Знайдіть усі такі трійки (a, b, c).